Шифр: В-23

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

по математике

2018/2019

Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2 с углублённым изучением английского языка"

Класс 10Б

ФИО Мекрюков Валентин Андреевич

Стр. 1

Олимпиадная работа. Лист № 1.

В-23

1	2	3	4	5	Σ
7	7.	2.	0	0	16.

№ 3

Сумма иррационального и рационального всегда иррациональна. Следовательно, над иррациональным числом всегда стоит не равное ему иррациональное. (аналогично для рациональных).

Так как все иррациональные ~~числа~~ первой строки имеют, таким образом, только одно равное и одно „рационализирующее" (стоящее в столбце (под ним)) в другой строке (и аналогично для второй строки), число иррациональных в одной строке чётно. При этом, если их будет 2018 (максимальное чётное число, меньшее 2019), то останется ~~одно~~ единственное рациональное число, и оно должно будет иметь под ~~собой~~ себя же, что противоречит условию. Значит, максимальное количество иррациональных в верхней строке — 2016!

Осталось привести пример расстановки с 2016 иррациональными не равными друг другу числами. Например, такой:

$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$\dots$	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$	1	2	3
$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\dots$	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$	2	3	1

2 2 4 4

2016 столбцов

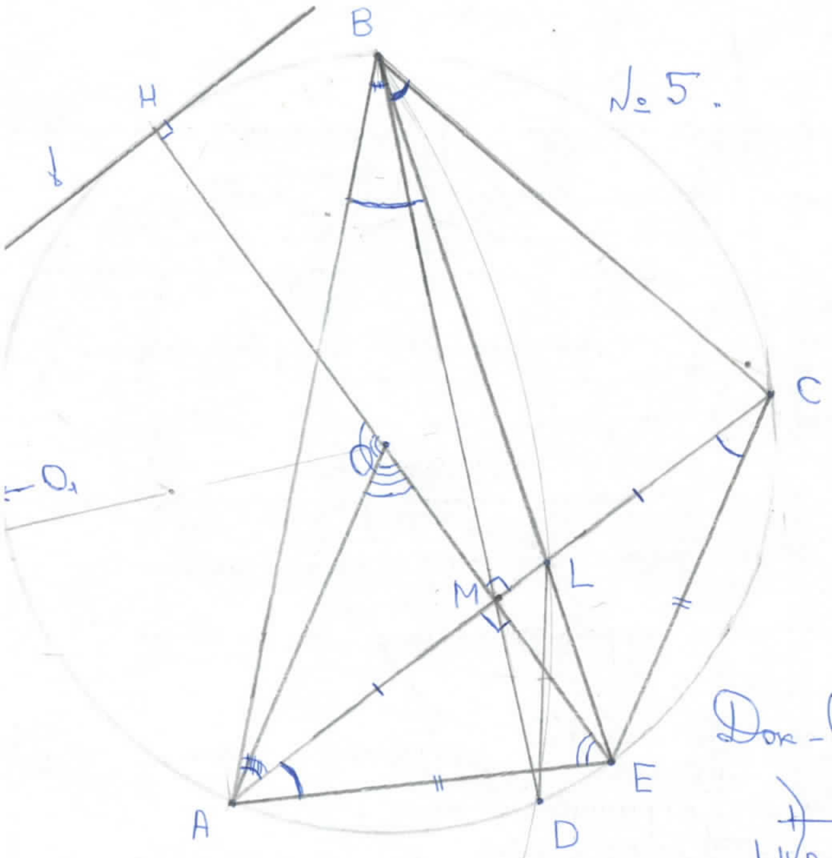
Ответ: 2016 иррациональных чисел.

№ 2

У ромба все стороны равны. Следовательно, нужно доказать равенство натуральных a, b, c, d при $P = a+b+c+d = 10^{100}$. Ранжируем числа по убыванию. Пусть $a \geq b \geq c \geq d$. Если $a+b+c \,\vdots\, d$, ~~значит~~ то и $a+b+c+d \,\vdots\, d$, аналогично для a, b, c. Значит, $P \,\vdots\, a$, $P \,\vdots\, b$, $P \,\vdots\, c$, $P \,\vdots\, d$. Следовательно, все эти числа вида $2^x 5^y$, где $x, y < 100$. Рассмотрим теперь $b+c+d \,\vdots\, a$. ~~$a = 2^x 5^y$~~. ~~Значит, вся сумма делится на $2^x 5^y$ а 5 в степени нельзя получить сложением~~ Если все числа не больше ~~меньше~~ a, значит, их сумма не больше ~~меньше~~ $3a$. ~~ни одно из них не делится на a~~ ~~Тогда сумма меньше 3a~~ Тогда или $b+c+d = a$ (и это не выпуклый четырёхугольник, т.к. сторона не может быть равна сумме остальных), либо $b+c+d = 2a$, или $b+c+d = 3a$. ~~Тогда~~ В этом случае

$P = a + b + c + d = a + 2a = 3a = 10^{100}$. $10^{100} \not\vdots\, 3$, значит a не натуральное, что противоречит условию. Следовательно, $b + c + d \neq 2a$ и $b + c + d \neq a$. Значит, $b + c + d = 3a$, и $a = \frac{10^{100}}{4}$ $\left(= \frac{P}{4}\right)$. Чтобы ни одно число из суммы не превосходило a, нужно, чтобы все они были $\leq \frac{10^{100}}{4}$. Но $b + c + d = 3 \cdot \frac{10^{100}}{4}$. Это максимальное значение суммы, и оно достигается при максимальных значениях всех трёх слагаемых. Тогда $b = c = d = \frac{10^{100}}{4} = a$, что и требовалось доказать.

№ 5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB \neq BC \neq AB$.
$\angle ABL = \angle CBL$
$AM = MC$
окр. ω – опис. около $\triangle ABC$
$\omega \cap AM = D$.
окр. $(O_1; O_1B)$ – опис. около $\triangle BDL$
$O_1 \in l$; $l \parallel AC$

Док-ть: l касается ω

Док-во.

~~1) $AC \perp OM$, значит, $l \perp OM$, т.к. $l \parallel AC$. O – центр окр. ω~~

~~2) Д.п. $N = l \cap AB$.~~
~~$\angle O_1BA = \angle 1$. $\angle O_1NB = \angle BAC$, т.к. $AC \parallel l$.~~

Пусть H – точка касания l и ω.

~~3) Точка O лежит на сер. перп. к BD, как и O_1.~~

~~4) Д.п. m – кас. к ω в точке C. $m \cap l = P$. Нужно доказать, что CP симметрична O_1N относительно OA.~~

~~5)~~ Докажем обратное утверждение: если l – касательная, то $l \parallel AC$.
Т.к. через O_1 проходит единственная прямая, параллельная AC, из обратного утверждения будет следовать прямое. $OH \perp O_1 l$ (касат.), $OM \perp AC$ (сер. перп.).
Д.п. $E = BL \cap \omega$. $AE = CE$, т.к. $\angle ABE = \angle CBE$ и $\triangle AEC$ – равнобедр.). Значит, $\triangle AME = \triangle CME$ по трём сторонам. Значит, ME – медиана, биссектриса и высота $\triangle AEC$.
Значит, EM – сер. перп. к AC. $O \in EM$.

Олимпиадная работа. Лист № 2.

№ 1.

Ответ: ~~до пяти~~ девять.

Пример: Рыцари сказали изначально „моё число больше n", а второй раз „моё число меньше, чем ~~$11-n$~~ $n+1$", ($n \in Z$) ~~$n < 11-n$ при $n < 5{,}5$, т.е. рыцарей пятеро, и они назвали n от 1 до 5~~, а задумали числа $(n+0{,}5)$. При ~~Доказательство максимальности: Пусть рыцарей больше 5. Тогда~~ этом $n \in Z$, $n \in [1;9]$. Единственный лжец сказал „моё число ~~меньше~~ больше 10" и „моё число ~~больше~~ меньше 10", а задумал, например, 5. ~~т.к. $[10;1] = \varnothing$~~ Тогда он ~~тогда он один раз соврал~~ солгал оба раза, как и положено лжецу.

Доказательство максимальности.

Докажем, что все участники разговора не могли быть рыцарями. Предположим противное. Пусть в первый раз все сказали правду. Тогда у одного рыцаря число больше 10. Значит, если во второй раз он произнёс „моё число меньше n (где $n < 10$)", он солгал, т.к. его число $a > 10 > n$. Значит, он не рыцарь, что противоречит предположению.

№ 4

~~В по~~ В последовательности можно принять $x^2 = y$ и рассматривать максимальные значения y, т.к. $x^2 \to max$ при $|x| \to max$, а модуль наименьшего ~~x~~ x — максимален и равен модулю наибольшего x, т.к. ~~их квадраты равны~~ ~~они~~ график функции $y = x^2$ симметричен (функция чётна) относительно оси ординат и y_{min} при $x = 0$.

Итак:

$P_n(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_n$.

Пусть в каком-либо случае $P_n(y) = (y + a_n)(y-1)^{n-1}$. При этом y_{max} при a_n min, т.е. при $|a_n|_{max}$ при $a_n < 0$. В этом случае $x_{min} = a_{n+1} = -\sqrt{-a_n} < a_n$. Тогда $P_{n+1}(y) = (y - \sqrt{-a_n})(y-1)^n$ и $a_{n+2} = -\sqrt{a_{n+1}} < a_{n+1}$ и т.д. Это соответствует условию задачи.

№5 (продолжение)

H, O, E пока не лежат на одной прямой!

$\angle HOE = \angle HOA + \angle \overset{E}{\cancel{D}}OA = 2\angle HEA + 2\angle \overset{E}{\cancel{D}}BA = 2(\angle MEA + \angle \overset{E}{\cancel{D}}BA)$

$\angle \overset{E}{\cancel{D}}BA = \angle \overset{E}{\cancel{D}}CA$ (опираются на дугу $A\overset{E}{\cancel{D}}$) $= \angle \overset{E}{\cancel{D}}AC$ (из $\triangle \overset{E}{\cancel{D}}AC$ – равнобедр.)

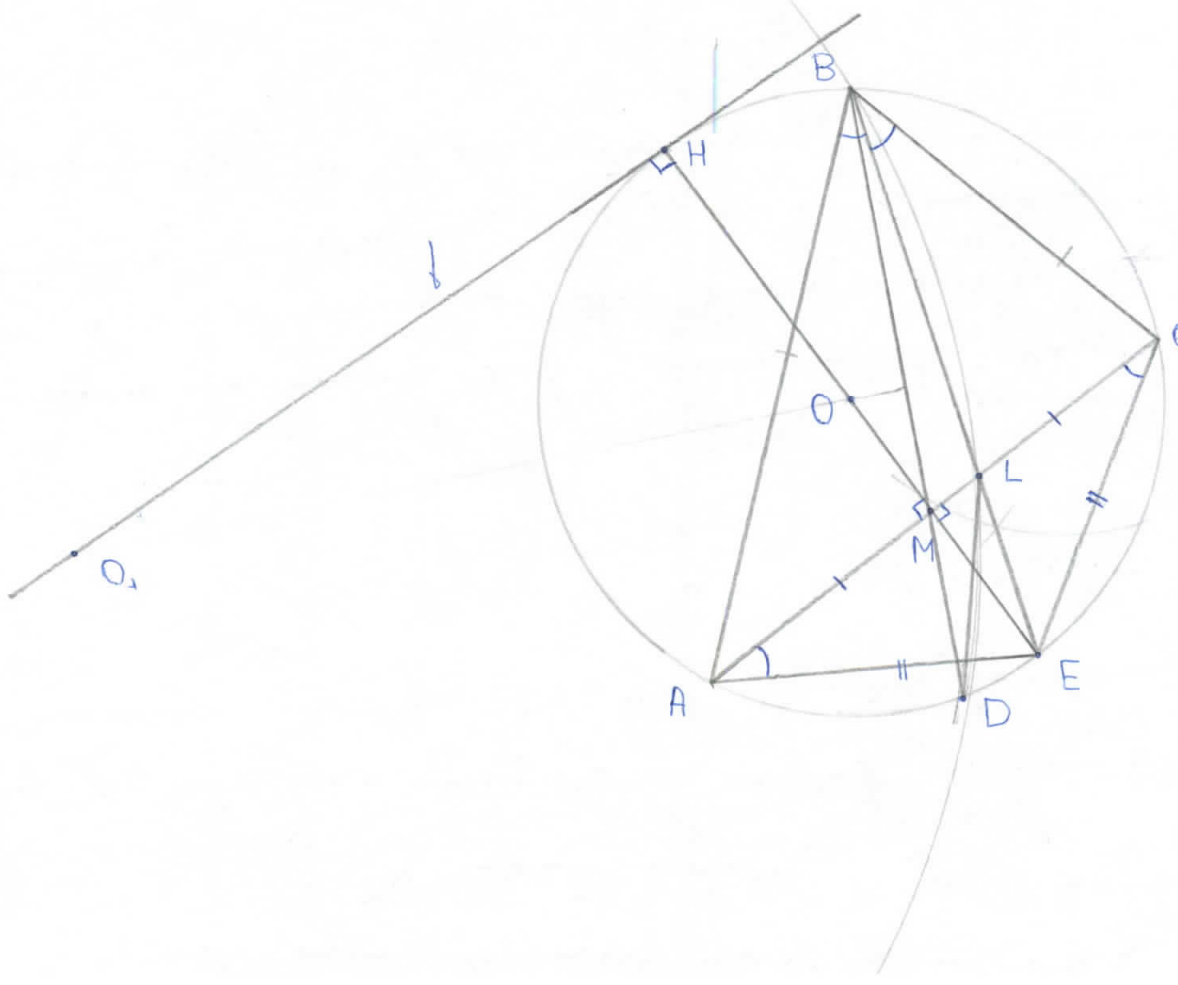
Значит, $\angle MEA + \angle EBA = \angle MEA + CAE = \angle MEA + \angle MAE = 180^\circ - \angle EMA =$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\angle HOE = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ – развёрнутый. Значит, H, O и E лежат на одной прямой. $M \in OE$. Значит, и M лежит на этой прямой. Значит, $HM \perp \ell$ и $HM \perp AC$, т.к. $OM \perp AC$ и $OH \perp \ell$ и $O \in HM$. Значит, $\ell \parallel AC$, откуда, по вышесказанному, следует утверждение задачи.

Доказано.

Дополнительный рисунок, дублирующий тот, что в начале:



6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	0	14

B23

Олимпиадная работа. Лист № 1.

№ 6

Обозначим n – меньший нечётный член последовательности. Тогда имеем последовательность либо $(n-1); n; (n+1); (n+2)$, которая начинается с чётного числа, либо $n; (n+1); (n+2); (n+3)$, которая начинается с нечётного числа. В обеих последовательностях можно выделить ряд нат. чисел $n, (n+1), (n+2)$. Пусть S_3 – их сумма.

$S_3 = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$

$S_3 \vdots 3$, т.к. $(n+1)$ – натуральное.

$S_3 \vdots (n+1)$;

Помимо этого, согласно обозначениям, n нечётно. Значит, и $(n+2)$ нечётно, а $(n+1)$ чётно. Значит, мы имеем S_3 – сумму двух нечётных и чётного числа $\left((2m+1) + (2l) + (2k+1) = 2(m+l+k+1)\right)$. И эта сумма чётна (из скобки). Значит, она делится на 2.

Значит, S_3 делится на 3, на 2 и на $(n+1)$. При этом $(n+1) > 100$, т.к. все четыре числа по условию больше 100. Значит, $3 \neq 2 \neq (n+1)$. (Все 3 указанных делителя S_3 различны). ~~Значит, S_3 представимо как $S_3 = 3 \cdot 2 \cdot (n+1)$~~ И При этом $(n+1)$, при заданных обозначениях, чётно. Значит, $\frac{n+1}{2}$ – натуральное число $\left(\frac{n+1}{2} > 50\right.$, т.к. $n+1 > 100$, значит, $\left.\frac{n+1}{2} \neq 2 \neq 3\right)$. Тогда S_3 представимо как $S_3 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{n+1}{2}$, где все 3 множителя – натуральные числа, больше единицы. Это и требовалось доказать. Осталось

Осталось привести пример для каких-либо 4 последовательных натуральных чисел больших 100. Пусть это будут

см. след. стр.

101, 102, 103, 104.

Тогда $101+102+103 = 3\cdot 2\cdot 51$.

№7

Найдём разность x_m и x_p, где $m<p$.

$x_m - x_p = 2^m\left(\sqrt[2^m]{b} - \sqrt[2^m]{a}\right) - 2^p\left(\sqrt[2^p]{b} - \sqrt[2^p]{a}\right) = 2^m\left(\sqrt[2^p]{b} - \sqrt[2^p]{a}\right)\cdot$

$\cdot\left(\left(\cancel{2^p}\sqrt[2^p]{b} + \sqrt[2^p]{a}\right)\left(\sqrt[2^{p-1}]{b} + \sqrt[2^{p-1}]{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt[2^{m+1}]{b} + \sqrt[2^{m+1}]{a}\right) - 2^{p-m}\right)$

$2^m>0$, т.к. $2>0$. $\sqrt[2^p]{b} > \sqrt[2^p]{a}$, т.к. $b>a>1$. Значит, $2^m\left(\sqrt[2^p]{b} - \sqrt[2^p]{a}\right)>0$.

Следовательно, $x_m > x_p$ (что и требуется доказать), если последний множитель (обозначим ~~его~~ его X) больше 0. (т.к. тогда $x_m - x_p > 0$).

~~$\sqrt[2^p]{b} + \sqrt[2^p]{a} > 2\sqrt{\sqrt[2^p]{ab}} = 2\sqrt[2^{p+1}]{ab}$ по неравенству о средних (при $a \neq b$).~~

~~Значит, $\left(\sqrt[2^p]{b} + \sqrt[2^p]{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt[2^{m+1}]{b} + \sqrt[2^{m+1}]{a}\right) > 2\sqrt[2^{p+1}]{ab}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt[2^{m+2}]{ab} =$~~

~~$= 2^{p-m-1}\cdot ab^{\left(\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+2}}\right)}$~~

~~Тогда $X > 2^{p-m-1}\cdot ab^{\left(\frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+2}}\right)} - 2^{p-m} = 2^{p-m-1}\cdot\left(ab^{\left(\frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+2}}\right)} - 2\right)$ и $X > 0$, если второй множитель этого выражения (обозначим его Y) не меньше нуля.~~

$\left(\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a}\right) > 2$, т.к. $\sqrt[n]{b} > 1$ (т.к. $b>1$) и $\sqrt[n]{a} > 1$ (т.к. $a>1$). Значит, произведение $(p-m)$ сумм радикальных корней из a и b больше, чем 2^{p-m}. Значит, $\left(\left(\sqrt[2^p]{a} + \sqrt[2^p]{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt[2^{m+1}]{a} + \sqrt[2^{m+1}]{b}\right) - 2^{p-m}\right) > 0$, и $x_m - x_p > 0$, что и требовалось доказать.

Примечание. Можно привести ещё более строгое доказательство того, что $X>0$. Я намерен привести его на стр. №4.

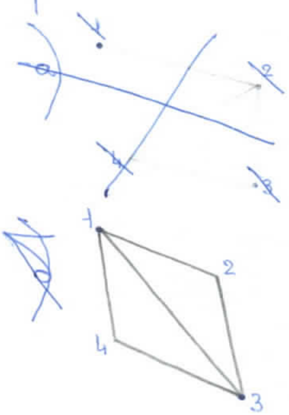
Олимпиадная работа. Лист № 3

№ 9

Сначала рассмотрим случай, когда $n = 4$. ~~При эт~~ В 4-угольнике 2 диагонали и они пересекаются. Значит, для хорошей раскраски можно использовать только одну диагональ. Значит, всего раскладов раскрасок 2 (рис. 1).

Теперь, если мы окрасим вершину 1 в чёрный цвет, то вершина 3 должна иметь белый. При этом 2 и 4 – любые по цвету. Значит, всего хороших раскрасок $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. Инвертируя цвета, увеличиваем кол-во хор. раскрасок в 2 раза. Итого – 8 хороших раскрасок при $n = 4$.

рис. 1

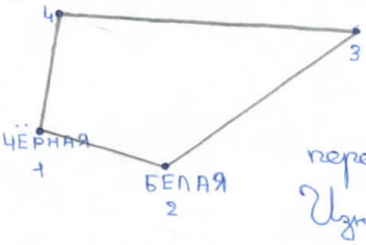


Теперь рассмотрим n-угольник при $n > 4$. Докажем по индукции, что ~~за~~ он сводится к четырёхугольнику с двумя различно окрашенными соседними вершинами.

База при $n = 5$ очевидна: если одна из вершин 5-угольника окрашена, то, чтобы весь четырехугольник разбился на треугольники необходимо наличие треугольника, состоящего из двух сторон и разноцветной диагонали. Следовательно, мы получим четырёхугольник с ~~дву~~ этой диагональю в качестве стороны. При $n > 5$ получим, что также необходим такой треугольник, а для $(n-1)$-угольника нужен либо треугольник, содержащий разноцветную сторону и обычную ей смежную сторону (и одна их окрашенных вершин выпадает из полученного $(n-2)$-угольника, но появляется другая, значит их снова 2), либо треугольник, содержащий разноцветную сторону и две диагонали из одной точки (и в этом случае одна из новых диагоналей одноцветна. Значит, вариант не подходит). Значит, мы получим треугольник и $(n-1)$-угольник с двумя соседними разноцветными вершинами, что и доказывалось по индукции.

Теперь найдём количество раскрасок для 4-угольника с соседними разноцветными вершинами (рис. 2). Возможны раскраски:

рис. 2



ЧБББ (диаг. 1-3 разноцв.), ЧББЧ (д. 1-3 разн.), ЧБЧЧ (д. 2-4 разн.), ЧБЧЧ (диаг. 2-4 разн.). Их всего ~~3~~ 4. ~~Инвертируя: 6.~~

Теперь рассмотрим, сколькими способами можно перейти от n-угольника к данному 4-угольнику.

Изначально, ~~сторону можно окрасить двумя спос~~ диагональ ~~мож~~ при переходе к $(n-1)$-угольнику можно провести двумя способами. Значит, при переходе к $(n-(n-4))$-угольнику возможно 2^{n-4} способов. Тогда возможно $4\cancel{3}\cdot 2^{n-4}$ хороших раскрасок. Инвертируем цвета: число хороших раскрасок возрастёт вдвое и составит $4\cancel{3}\cdot 2^{n-3}$, т.е. 2^{n-1}

Ответ: $\overset{4}{\cancel{3}}\cdot 2^{n-3}$ для n-угольника при $n \geq \overset{4}{\cancel{5}}$, (в частности, 8 при $n=4$);

Примечание. Стоит заметить, что перейти к четырёхугольнику с одинаково окрашенными ~~со~~ всеми вершинами нельзя, т.к. тогда диагональ при последнем переходе одноцветна.

Примечание 2. $8 = 2^{4-3}$, поэтому для 4-угольника формула также справедлива, хотя из решения этого не следует.

Примечание 3. ~~Э~~ Если применить формулу к треугольнику, получится 4. Это число всех различных способов окрасить его вершины в два цвета.

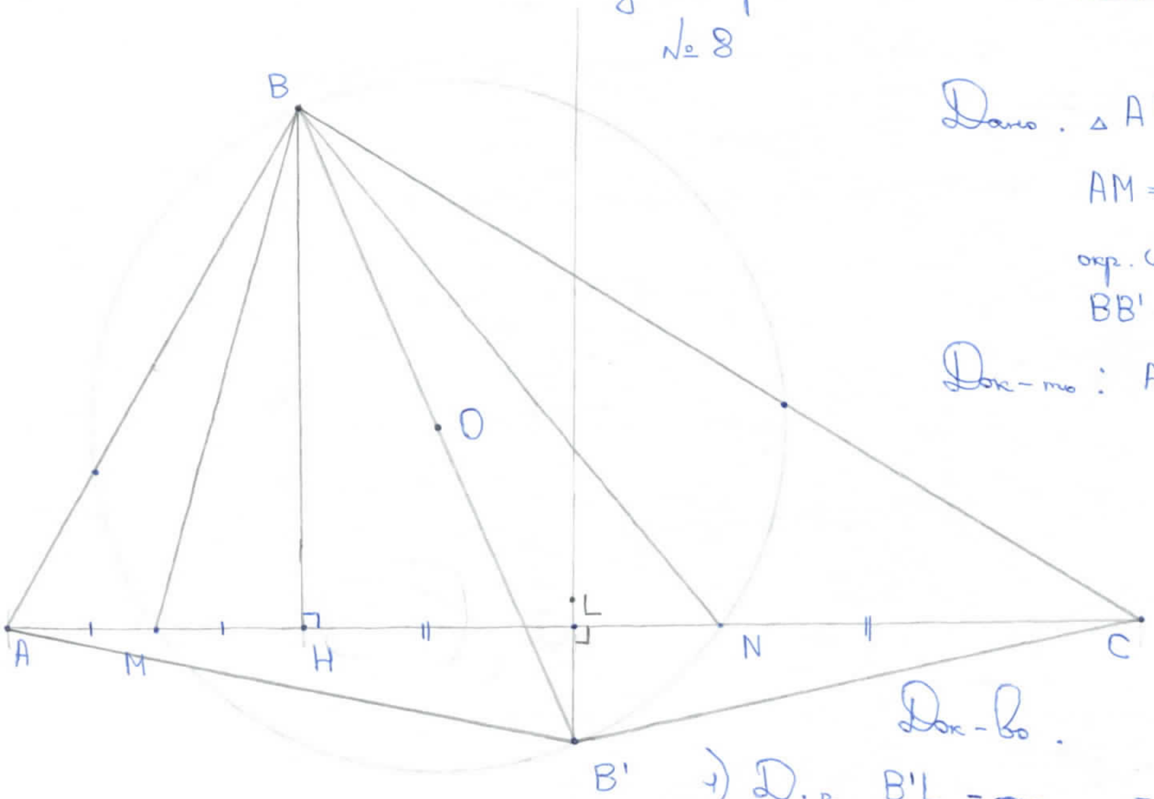
Примечание 4. Строго говоря, в решении как 1 четырёхугольник рассматривалось 4 разных четырёхугольника (в зависимости от нумерации вершин). Поэтому, если все фигуры не имеют смежных равных сторон, то число различных раскрасок можно принять ра~~з~~вным $2^{n-3}\cdot\frac{4}{2} = 2^{n-2}$ (т.к. в данном варианте инвертирование ~~не~~ применимо, один ~~из~~ четырёхугольник инвертируется в другой рассматриваемый).

Ответ в ~~частном~~ таком случае: 2^{n-2}.

Стр. № 3

Олимпиадная работа. Лист № 2. В23

№ 8



Дано. $\triangle ABC$; BH – высота;
$AM = MH$; $HN = NC$;
окр. ω – опис. около $\triangle BMN$
BB' – диаметр;

Док-ть: $AB' = CB'$

Док-во.

1) Д. п. $B'L$ – ~~серединный~~ перпендикуляр к AC.

№ ~~2~~ 7 (доказание).

$\sqrt[2^p]{b}+\sqrt[2^p]{a} > 2\sqrt[2^{p+1}]{ab}$ из неравенства между ср. арифметич. и средним геометрич. ($\frac{m+n}{2} \geqslant \sqrt{mn}$, причём равенство при $m=n$).

Преобразуем так все множители в уменьшаемом в X:

$$\left(\sqrt[2^p]{b}+\sqrt[2^p]{a}\right)\left(\sqrt[2^{p-1}]{b}+\sqrt[2^{p-1}]{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt[2^{m+1}]{b}+\sqrt[2^{m+1}]{a}\right) \geqslant 2\sqrt[2^{p+1}]{ab}\cdot 2\sqrt[2^{p+2}]{ab}\cdot$$

$$\cdot 2\ldots\cdot 2\sqrt[2^{m+2}]{ab} = 2^{(p+1)-(m+2)+1}\cdot\left(ab\left(\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m+2}}\right)\right) =$$

$$= 2^{p-m}\cdot(ab)^x$$, где $x=\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{p+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m+2}}>0$.

Тогда:

$$X = 2^{p-m}\cdot(ab)^x - 2^{p-m} = 2^{p-m}\left((ab)^x-1\right)$$

$a>1$, $b>1$, значит, $ab>1$, значит, $(ab)^x>1$ при $x>0$, значит, $(ab)^x-1>0$, а т.к. $2^{p-m}>0$, то и $2^{p-m}((ab)^x-1)>0$, т.е. $X>0$.

Тогда $2^m\left(\sqrt[2^p]{b}-\sqrt[2^p]{a}\right)X>0$, т.к. $2^m>0$, $X>0$ и $\sqrt[2^p]{b}>\sqrt[2^p]{a}$.

Тогда $x_m-x_p>0$ при $m<p$, и тогда $x_m>x_p$ при $m<p$, (что и требовалось доказать).

Олимпиадная работа. Лист №4.

№10.

Предположим противное. Тогда для какого-то натурального k не найдётся числа a_m такого, что $a_m \vdots k$. Примем $m = k^2$.
Тогда $a_m = \cancel{a_{k^2+1} - a_{k^2} + a_{[\sqrt{k^2}]}} = a_{k^2} \cancel{+ a_k}$. Докажем, что $a_{k^2} \vdots a_{k-1}$. Доказательство по индукции, $k \geqslant 2$.
<u>База</u>: $a_4 \vdots a_{2-1}$. $a_4 = a_3 + a_{[\sqrt{3}]} = a_3 + a_1 = a_2 + a_{[\sqrt{2}]} + a_1 =$
$= a_2 + 2a_1 = a_1 + a_{[\sqrt{1}]} + 2a_1 = 4a_1 = 4$. $a_1 = \cancel{a_1 + a_{[\sqrt{1}]} = 2a_1 = 2} = 1$.
$4 \vdots 1$.
<u>Докажем теперь, что если $a_{(k-1)^2} \vdots a_{k-1}$, то и $a_{k^2} \vdots a_{k-1}$.</u>
$a_{k^2} = a_{k^2-1} + a_{[\sqrt{k^2-1}]} = a_{k^2-1} + a_{(k-1)} = a_{k^2-2} + 2a_{k-1} =$
$= \left(a_{(k-1)^2} + 2(1-k)a_{k-1}\right) \vdots a_{k-1}$ по предположению.
~~$a_k = a_{k-1} + a_{[\sqrt{k-1}]} =$~~
Это означает, что $a_{(k+1)^2}$ всегда делится на a_k.

Стр. № 8

В 23